

Travail de vacances pour la rentrée 2026 en Mathématiques Approfondies

Vous devez avoir acquis pour la rentrée prochaine :

1. Tout le cours de 1^{ière} année, chaque définition, chaque propriété.
2. Les exercices de khôlle, ceux des feuilles d'exercices des chapitres, les DST, les DM et les CB.

Comment s'y prendre ?

1. Pour la partie cours :

Posez-vous la question : êtes-vous capable de refaire les exemples du cours, avec **une rédaction irréprochable** ?

Si c'est non, vous savez alors ce qu'il **vous reste à faire** : c'est à la fois un travail d'apprentissage et de rédaction que personne ne peut faire à votre place, et aussi un travail de compréhension profonde

En analyse : faire des fiches de rédactions types puis les mémoriser.

En algèbre : faire des cartes mentales (schémas heuristiques) puis les mémoriser.

2. Pour la partie pratique (les exercices) :

De nombreux calculs, exercices ou thèmes sont **fondamentaux et récurrents aux concours**.

Ils ne constituent absolument pas une garantie de réussir les épreuves, mais il s'agit quand même d'un second socle (après celui du cours) constitué des **bases minimales** pour affiner sa compréhension et s'exercer à la rédaction.

Par exemple, on ne peut concevoir que l'étudiant passe plusieurs minutes à se demander comment il va rédiger la réponse à une question, alors qu'il a déjà rencontré plusieurs fois cette même question auparavant.

Ce genre de problème doit être réglé définitivement pendant les vacances.

Encore une fois, **une rédaction irréprochable est absolument nécessaire**, au risque de froisser le correcteur et de ne pas avoir les points attendus.

Une fois ces bases acquises (mais il faudra y revenir régulièrement), on pourra avancer et aller plus loin. En effet, il ne sert à rien de vouloir toujours faire du neuf si on ne sait plus faire le vieux.

L'étudiant qui ne comprend pas cela est condamné à redécouvrir sans arrêt ce qu'il a mal appris ou oublié.

*Lorsque vous faites un exercice faites **un effort de mémorisation** et de **fichage de la méthode** mise en place pour répondre à des questions classiques ou récurrentes.*

Repérez, dans la formulation des questions, les termes qui doivent vous guider vers telle ou telle méthode.

Fichez et mémorisez les rédactions types comme la **réurrence**, les **formules de Taylor**, le **théorème de la bijection**, les **intégrations par parties**, les **changements de variable**, la **preuve d'une implication**, d'une **inclusion**, d'une **égalité**, les **critères de convergence des séries et des intégrales**, ... (la liste n'est pas exhaustive !)

3. Concrètement

Pour bien faire, je mets ci-dessous quelques-uns de ces exercices et problèmes fondamentaux qui sont à faire pour le stage de rentrée.

L'idéal, pour bien démarrer l'année, serait de maîtriser tous ces exercices ...

Vous devez donc faire au mieux, selon vos capacités, en visant d'abord et avant tout **la qualité plutôt que la quantité** : *il vaut mieux en maîtriser la moitié parfaitement plutôt que tout superficiellement.*

(En cas de problème vous pouvez me contacter par mail : agnes.sanjose@grandlebrun.com).

1/ Analyse page 2

2/ Algèbre page 6

3/ Probabilités page 8

Analyse

1. Généralités :

Exercice 1 (Inégalité)

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}]$, $e^{-t^2} \geq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$.

Exercice 2 (Théorème de la bijection et suite implicite)

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

1. Soit $c > 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_n) : \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{c}{n}$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une unique solution que l'on notera x_n . (Indication : on pourra faire le tableau de variations de $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\varphi(x)}{x}$)
2. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_n)^2 + 2 \ln(x_n) = 2 \ln(n) - \ln(2\pi c^2)$.
4. En prenant un équivalent de chaque membre de l'égalité obtenue à la question précédente, établir que : $x_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2 \ln(n)}$

Exercice 3 (Equivalent et limites)

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ (fixé). Montrer que $\binom{n}{k}$ est équivalent à $\frac{n^k}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.
2. En déduire, pour tout $a \in]0, 1[$, les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} a^n$.

Exercice 4 (Equivalent et théorème de l'encadrement et série)

Dans cet exercice x désigne un élément de $]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.
b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que : $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$.
c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, un encadrement de S_n .
d) Démontrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. Informatique.

- a) On considère la fonction suivante écrite en langage Python.

```
def rang(a):  
    k=1  
    s=1  
    while s<a:  
        k=k+1  
        s=s+1/k  
    return k
```

Expliquer ce que produit l'appel `rang(50)`.

b) Le code suivant :

`from numpy import exp
exp(49)`

 renvoie : 1.9073465724950998e+21.

Expliquer rapidement ce que cela laisse penser si l'on fait l'appel `rang(50)`.

3. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^n t^{k-1}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

c) Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

d) En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge, de somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

2. Intégrales

Exercice 5 (Formule de Taylor)

1. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral entre a et b pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Appliquer cette formule entre 0 et 1 à l'ordre 1, avec la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \ln(1+x^2)$.

3. Calculer : $\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt$.

Exercice 6 (Suite définie par une intégrale)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.

2. En déduire, à partir d'une conjecture, une expression de I_n à l'aide de factorielles.

3. Déterminer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 7 (Suite définie par une intégrale)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^1 (t \ln(t))^n dt$

1. a) Justifier la convergence de l'intégrale I_n .

b) Calculer I_0

2. Soit $x \in]0, 1]$, on pose $I_n(x) = \int_x^1 (t \ln(t))^n dt$

a) A l'aide du changement de variable $u = t^{n+1}$ montrer que $I_n(x) = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot \int_{x^{n+1}}^1 (\ln(u))^n du$.

b) En déduire I_n en fonction de n et $J_n = \int_0^1 (\ln(u))^n du$.

3. Exprimer J_n en fonction de n et J_{n-1} .

4. En déduire la valeur de I_n .

3. Séries

Exercice 8 (Séries usuelles)

Déterminer la nature des séries suivantes et calculer leur somme éventuelle.

1. a) $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{2}{e}\right)^n$ b) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n-1)!}$ c) $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{3^{n-1}}$ d) $\sum_{n \geq 0} \frac{-3 + 5n}{n!}$
2. a) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}$ b) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}$ (Remarque à retenir : $n^2 = n(n-1) + n$)

Exercice 9 (Formule de Taylor et séries)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \ln(1+x)$.
2. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange pour montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

3. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 10 (Suite-Python)

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration les formules :

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1, \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

On rappelle le développement limité à l'ordre 5 de la fonction sinus au voisinage de 0 donné par :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

1. Montrer que l'on définit parfaitement deux suites (u_n) et (v_n) en posant : $u_1 = 0$, $v_1 = 2$ et pour tout entier naturel n non nul :
- $$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{u_{n+1}}$$
2. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie v_n :

```
def suite_v(n):
    u = 0
    v = 2
    for k in range(2, n+1):
        :
        :
        :
    return v
```

3. a) Montrer qu'il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont les éléments appartiennent à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \cos(\alpha_n)$.
- b) Expliciter α_n en fonction de n , pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
- c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $v_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ puis donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
4. Déterminer les constantes réelles a , b et c telles que : $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + \frac{b}{4^n} + \frac{c}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$
5. Accélération de convergence par la méthode de Richardson.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $w_n = \frac{4v_{n+1} - v_n}{3}$.

- a) Écrire en **Python** une fonction **suite_w** utilisant la fonction **suite_v** et qui renvoie w_n .
- b) Donner la limite de w_n .
- c) Montrer que $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \pi - \frac{\pi^5}{480 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$,
puis déterminer un équivalent de $\frac{w_n - \pi}{v_n - \pi}$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
- d) Dans le cadre de la recherche d'une valeur approchée de π , quel intérêt y a-t-il à utiliser la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ plutôt que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

6. Généralisation de la méthode de Richardson.

Étant donnés deux réels q et r de $]0, 1[$ tels que $q > r$, on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \quad x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + bq^n + cr^n + o(r^n).$$

- a) Définir une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dont le terme général est une combinaison linéaire de x_n et x_{n+1} , qui vérifie : $y_n = a + dr^n + o(r^n)$, où d est une constante à déterminer en fonction de c , q et r .
- b) Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + bq^n + o(q^n)$.
- c) En déduire que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers a plus rapidement que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Algèbre (Polynômes, matrices, espaces vectoriels, dimension)

Exercice 1 (Polynômes de Tchebychev)

On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.

1. Déterminer T_2 , T_3 et T_4 .
2. Déterminer par récurrence le degré et le coefficient dominant de T_n .
3. Déterminer la parité de T_n en fonction de n .
4. Calculer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 2 (Système "récurrent")

On considère $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = T - 2I_3$

1. Calculer N , N^2 et N^3 .
2. En déduire T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
4. Calculer la matrice $A = PTP^{-1}$.
5. En déduire grâce à la question 2. une expression de A^n .
6. En déduire, l'expression en fonction de n des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$,

$$w_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + 3w_n \end{cases}$$

Exercice 3 (Matrices)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $S^2 = S$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $M(\alpha) = \alpha I_n + (1 - \alpha)S$.

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $M(\alpha)$ est symétrique.
2. Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha\beta)$.
3. En déduire que, pour tout $\alpha \neq 0$, $M(\alpha)$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $(M(\alpha))^{-1}$.
4. On suppose que $\alpha > 0$ et qu'il existe un vecteur colonne non nul X et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $M(\alpha)X = \lambda X$.

Démontrer alors que $\lambda > 0$. (Pour cette dernière question, on pourra calculer ${}^t(M(\sqrt{\alpha}) \cdot X) \cdot (M(\sqrt{\alpha}) \cdot X)$)

Exercice 4 (Application linéaire et matrices)

On considère les matrices de $M_4(\mathbb{R})$,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel engendré par (I, J, K, L) et Id l'endomorphisme identité de E .

On pose $A = J + K$.

1. Montrer que $\beta = (I, J, K, L)$ est une base de E et donner la dimension de E .
2. a) Exprimer JK , KL et LJ en fonction respectivement de L , J et K .
b) Calculer J^2 , K^2 et L^2 puis en déduire que: $KJ = -L$
c) En déduire que : $\forall (M, N) \in E^2$, $MN \in E$.

3. Calculer A^2 . En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A .
4. On considère maintenant l'application φ_A qui à toute matrice M de E associe: $\varphi_A(M) = AMA^{-1}$
 - a) Montrer que φ_A est un endomorphisme de E .
 - b) Déterminer $\text{Ker}(\varphi_A)$ puis montrer que φ_A est un automorphisme de E .
5. a) Écrire la matrice Φ_A de φ_A dans la base $\beta = (I, J, K, L)$.
 - b) Montrer que $\beta' = (I, J + K, J - K, L)$ est une base de E et déterminer $\text{Mat}_{\beta'}(\varphi_A)$.
 - c) Montrer que $E = \text{Ker}(\varphi_A - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\varphi_A + \text{Id})$

Exercice 5 (Espace vectoriel en dimension finie)

On pose dans $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (0, 1, 1, -2)$, $u_3 = (2, -3, -1, 4)$ et $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

1. Déterminer une base et la dimension de F .
2. On pose $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 0, 3)$ et $G = \text{Vect}(v_1, v_2)$.
Démontrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.
3. On pose $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$.
Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, donner une base et sa dimension.
4. Déterminer $\dim(F + H)$.

Exercice 6 (Espace vectoriel de fonctions)

Dans cet exercice, on admet que l'ensemble E des fonctions numériques deux fois dérivables est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et on note : $F = \{f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = (1 + x^2)f(x)\}$.

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Montrer que si $(u, v) \in F^2$ alors $u'v - v'u$ est constante.
3. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ appartient à F .
4. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \int_0^x \frac{1}{(f(t))^2} dt$ appartient à F .

Exercice 7 (Espace vectoriel en dimension finie)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On dispose d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$u(e_1) = e_1 + 5e_2 + 2e_3 \quad u(e_2) = -e_1 + e_2 \quad u(e_3) = e_1 - 7e_2 - 2e_3$$

1. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer u^3 et en déduire que : $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ et $\text{Im}(u^2) \subset \text{Ker}(u)$
3. Démontrer que : $\text{rg}(u) \leq \dim(\text{Ker}(u^2)) \leq 2$.
4. Déterminer le rang de u et en déduire que : $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u^2)$ et $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u^2)$

Exercice 8 (Application linéaire et polynômes)

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[x], (\varphi(P))(x) = xP'(x) - P(x)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ et déterminer $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{rg}(\varphi)$.
2. En déduire $\text{Ker}(\varphi)$.
3. Donner la matrice de φ dans la base canonique.
4. Montrer que $\text{Im}(\varphi) \oplus \text{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_n[x]$.

Probabilités discrètes

Exercice 1

Une puce se déplace sur une demi-droite d'origine O par sauts successifs d'une ou deux unités vers la droite en suivant la procédure suivante :

- Au départ la puce est en O .
- Les sauts sont indépendants.
- À tout instant, la probabilité d'un saut d'une ou deux unités est la même et vaut $\frac{1}{2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note S_n (respectivement C_n) la variable aléatoire égale au nombre de sauts d'une unité (respectivement deux unités) au bout de n sauts.

Déterminer les lois de S_n et C_n ainsi que leur espérance.

2. On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce après n sauts. Déterminer $X_n(\Omega)$.

3. Déterminer une relation entre S_n , C_n et n .

4. Déterminer une relation entre S_n , C_n et X_n .

5. En déduire la loi de X_n .

6. Déterminer l'espérance et la variance de X_n .

7. Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser le point d'abscisse n . Déterminer $Y_n(\Omega)$ en fonction de la parité de n .

8. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier $k \geq 1$,

$$P(Y_n = k) = \frac{1}{2}P(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}P(Y_{n-2} = k-1)$$

Problème

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent. Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable X_n prend ses valeurs dans $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$.

Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 4, 3, alors $X_5 = 4$. Pour tout k de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k -ième tirage.

Partie I : Etude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

Pensez à modéliser par un arbre pondéré faisant intervenir les N_k .

1. a) Exprimer l'événement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3 .
En déduire $P(X_3 = 4)$.

b) Montrer que $P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$, et en déduire $P(X_3 = 3)$.

2. Calculer l'espérance de X_3 .

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout k de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

2. Calculer $P(X_n = n+1)$.

3. Montrer, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$: $P_{[N_1=i]}(X_n = 2) = \frac{n-i+1}{n}$.

4. En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $P(X_n = 2) = \frac{n+1}{2n}$.

5. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

a) Justifier l'égalité d'événements suivante : $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \dots > N_k]$.

b) En déduire que $P(X_n > k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$. (*Indication pensez au dénombrement*)

c) Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

6. Exprimer, pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, $P(X_n = k)$ à l'aide de $P(X_n > k-1)$ et de $P(X_n > k)$.

7. En déduire que : $E(X_n) = \sum_{k=0}^n P(X_n > k)$. Puis que $E(X_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

8. Montrer que : $\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$.

(*Indication : pensez à utiliser les formules de Pascal et «sans nom»*)

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 2}$.

1. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que $\binom{n+1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$

b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$.

2. Montrer que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, P(Z = k) = \frac{k-1}{k!}$$

On admet aussi que Z admet une espérance si la série de terme général $kP(Z = k)$ est convergente.

Dans ce cas, l'espérance de Z est : $E(Z) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(Z = k)$

3. a) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

b) Comparer $E(Z)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$.